Test Telematico di Matematica (A)

Scienze Agrarie   3/05/2021

1) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 1}\ \left[(x+1)e^{\frac{x}{x-1}}\right] .$$

2) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x^2+2x & \text{se} \quad -3 \le x < 1 \\ \pi/2 & \text{se} \quad x = 1 \\ \arctan \frac{x^2}{x-1} & \text{se} \quad 1 < x \le 4 \end{cases} ,$$

dire quale tipo di discontinuità presenta nel punto $x_0 = 1$.

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) \;=\; \frac{x^2}{\log(x^2)}$$

e calcolarne la funzione derivata prima.

4) Calcolare

$$\int \frac{2+\arctan(x)}{1+x^2}\, dx .$$

Soluzione

1) Il limite proposto presenta un esponente che ha limite $\pm\infty$ se $x \to 1^{\pm}$.
Si ha

$$\lim_{x \to 1^-} \left[(x+1)e^{\frac{x}{x-1}}\right] \;=\; 0\,, \qquad \lim_{x \to 1^+} \left[(x+1)e^{\frac{x}{x-1}}\right] \;=\; +\infty\,.$$

Si conclude che il limite proposto **non esiste** avendo limite destro e limite sinistro diversi tra loro.

2) Calcoliamo il limite della funzione per x che tende a 1. Risulta

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 2x) \;=\; 3\,, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \arctan \frac{x^2}{x-1} \;=\; \frac{\pi}{2}\,.$$

La discontinuità che si presenta è di **prima specie**.

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali risulta $x^2 > 0$, $x^2 \neq 1$. Si ha quindi

$$D =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[\,.$$

Si ha

$$f'(x) \;=\; \frac{2x\log(x^2) - x^2\frac{2x}{x^2}}{(\log(x^2))^2} \;=\; \frac{2x(\log(x^2) - 1)}{(\log(x^2))^2}.$$

4) Risulta

$$\begin{aligned}\int \frac{2 + \arctan(x)}{1 + x^2}\,dx \;&=\; \int \frac{2}{1+x^2}\,dx + \int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx \\ &=\; 2\arctan(x) + \frac{1}{2}\arctan^2(x) + C\end{aligned}$$